数理解析研究所講究録
193巻 1973年 129-130

平均値定理について

名大 中井 喜信

И.М. Виноградов の平均値定理（例えば K. Chandra-sekharan "Arithmetical Functions", Springer, die Grundlehren der math. Wissen. in Einzeldarstellungen Bd 167 の第4章）

$$\int_0^1\!\!\cdots\!\!\int_0^1 d\beta_1 \cdots d\beta_k \left| \sum_{X_0 < x \leq X_0+N} e\left(\sum_{t=1}^{k} \beta_t x^t\right) \right|^{2l} \ll_{(k,l)} N^{2l - \frac{1}{2}k(k+1) + \frac{1}{2}k(k+1)\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)^j}$$

但し $l \geqq \frac{1}{4}k(k+1) + jk$

の類似として、次に述べる事が成立します。

今 $k \geqq 2$ なる整数を固定し、N, l は自然数とします。記号 (r, s) は $r+s \leq k$, $r \geq 0$, $s \geqq 1$ なる範囲を動く事にします。又 μ, ν はいずれも $\geqq k$ なる整数とし、X_0, Y_0 は任意の整数とします。又 $d\alpha$ は $\prod_{(r,s)} d\alpha_{rs}$ の意味にとります。この時

ここでは $e(\alpha) \underset{\text{def}}{=} e^{2\pi i\alpha}$ とします。

$$J_k\binom{q\ \ \mu}{N\ \ \nu} \overset{\text{def}}{=} \int\!\!\int_0^1 d\alpha \left(\sum_{Y_0<y\le Y_0+N}\left|\sum_{X_0<x\le X_0+q} e\left(\sum_{(r,s)}\alpha_{rs}\, y^r x^s\right)\right|^{2\mu}\right)^{\nu}$$

とおきます。

[Lemma]　$\mu \geqq k \geqq 2$,　$\nu \geqq \max\left(k+\sum_{(r,s)}(\lambda r+\lambda' s),\ k^2\right)$

$l = \max_{(r,s)}(\lambda r+\lambda' s)$　,（λ と λ' とは固定された自然数），及び　$N \geqq p^{\lambda}$,　$q \geqq \max(p^k, p^l)$　,　p は素数で $>k$.

以上の仮定のもとに

$$J_k\binom{q\ \ \mu}{N\ \ \nu} \leqq 4^{\nu}\cdot \nu^{k+1}\cdot\left(\mu^{2k^3}+k^{\nu(2\mu-1)}\right)\cdot\left(N_1\, q_1^{2\mu}\right)^{k}\cdot p^{\nu(\lambda+2\mu\lambda')-\sum_{(r,s)}(\lambda r+\lambda' s)}\times J_k\binom{q_1\ \ \mu}{N_1\ \ \nu-k}$$

が成立する．但しここに　$q_1 = \left[\frac{q}{p^{\lambda'}}\right]+1$　,　$N_1 = \left[\frac{N}{p^{\lambda}}\right]+1$.

[定理]　$k \geqq 2$　,　$\mu \geqq k$　,　$\nu \geqq k\cdot(j+2)+\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$　,

$q \geqq \left(2(k+1)\right)^{k\cdot(1-\frac{1}{k})^{-j}}$　,　j は整数で $\geqq 0$　,　とすると

$$J_k\binom{q\ \ \mu}{q\ \ \nu} \leqq \left\{\nu^{2k^2}\left(4^{1+3\log 2\cdot\frac{2\mu+1}{k}}\mu\right)^{\nu}\right\}^{(2\mu+1)(j+1)}\times q^{\nu(1+2\mu)-\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)(1-\frac{1}{k})^{j+1}}$$

が成立する。

ここで　$\mu\cdot\nu \gg k^4$　なる条件は必要です。証明は引用した Chandrasekharan の本の類似を行えば、得られます。